

КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

МГУ имени М. В. Ломоносова, 18 апреля 2019 года

Вариант 1

- В результате испарения из раствора 2 кг воды концентрация соли в нём возросла на 20%, а после добавления к получившемуся раствору 10 кг воды — стала вдвое меньше первоначальной. Найдите первоначальную концентрацию соли.
 - В треугольнике ABC стороны AB и AC равны 6 и 4 соответственно. В каком отношении медиана BM разбивает биссектрису AL ?
 - Дана функция $f(x) = \frac{x+8}{x^2-4} : \left(\frac{x-2}{3x^2+5x-2} - \frac{4}{4-x^2} \right)$.
 - Найдите $f(0,3)$.
 - Постройте график функции $f(x)$.
 - Решите неравенство $\frac{7}{\sqrt{x-1}+5} < 1 + \frac{2}{5-\sqrt{x-1}}$.
 - Найдите расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей прямоугольного треугольника с катетами 3 и 4.
 - Решите систему уравнений $\begin{cases} x^3 - y^3 = 65, \\ x^2y - xy^2 = -20. \end{cases}$
 - Существуют ли такие числа, что сумма их квадратов рациональна, а разность их квадратов иррациональна? Ответ обоснуйте.
 - Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$\frac{x^2 + (3a-1)x + 2a^2 - 2}{x^2 - 3x - 4} = 0$$
 имеет единственное решение.
 - Докажите, что длина любой диагонали четырёхугольника меньше половины периметра этого четырёхугольника.
 - Сколько 9-значных чисел, кратных 5, можно составить, переставляя цифры числа 377353 752?

Таблицу не заполнять!

КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

МГУ имени М. В. Ломоносова, 18 апреля 2019 года

Вариант 2

- К водному раствору кислоты добавили 1 кг воды, отчего его концентрация уменьшилась в $\frac{5}{3}$ раза. Во сколько раз уменьшится концентрация полученного раствора, если добавить к нему 2 кг воды?
 - В треугольнике ABC стороны AB и BC равны 4 и 8 соответственно. На стороне AB отмечена точка R так, что $AR = 1$. В каком отношении отрезок CR разбивает биссектрису BL ?
 - Дана функция $f(x) = \frac{x-4}{x^2-1} : \left(\frac{x-1}{2x^2+3x+1} + \frac{1}{1-x^2} \right)$.
 - Найдите $f(-0,4)$.
 - Постройте график функции $f(x)$.
 - Решите неравенство $\frac{5}{\sqrt{x+2}+4} < 1 - \frac{1}{\sqrt{x+2}-4}$.
 - Найдите расстояние от вершины A до центра вписанной окружности треугольника ABC , если $AB = 5$, $BC = 8$, $AC = 7$.
 - Решите систему уравнений $\begin{cases} x^3 + y^3 = 7, \\ x^2y + xy^2 = -2. \end{cases}$
 - Существуют ли такие числа, что их произведение рационально, а разность их квадратов иррациональна? Ответ обоснуйте.
 - Найдите все значения параметра b , при которых уравнение
$$\frac{x^2 + (3b-5)x + 4 - 4b^2}{x^2 + 2x - 3} = 0$$
имеет единственное решение.
 - Докажите, что сумма длин диагоналей выпуклого четырёхугольника больше полупериметра этого четырёхугольника.
 - Сколько 9-значных чётных чисел можно составить, переставляя цифры числа 919 541 413?

Таблицу не заполнять!

Ответы к варианту 1

1. 0,6.
2. $\frac{5}{3}$.
3. а) $-\frac{1}{3}$; б) график совпадает с графиком функции $y = 3 - \frac{1}{x}$, из которого исключены точки с абсциссами $-8; -2; \frac{1}{3}; 2$.
4. $(1; 26) \cup (82; +\infty)$.
5. $\sqrt{5}/2$.
6. $(4; -1), (1; -4)$.
7. Да, например $\sqrt{2} \pm 1$ или $\sqrt{3} \pm \sqrt{5}$ (примеров много).
8. $-5; -1; 0; \frac{3}{2}; 3$.
9. Указание. Воспользуйтесь неравенством треугольника.
10. $\frac{8!}{3!3!} = 1120$.

Ответы к варианту 1

1. 0,6.
2. $\frac{5}{3}$.
3. а) $-\frac{1}{3}$; б) график совпадает с графиком функции $y = 3 - \frac{1}{x}$, из которого исключены точки с абсциссами $-8; -2; \frac{1}{3}; 2$.
4. $(1; 26) \cup (82; +\infty)$.
5. $\sqrt{5}/2$.
6. $(4; -1), (1; -4)$.
7. Да, например $\sqrt{2} \pm 1$ или $\sqrt{3} \pm \sqrt{5}$ (примеров много).
8. $-5; -1; 0; \frac{3}{2}; 3$.
9. Указание. Воспользуйтесь неравенством треугольника.
10. $\frac{8!}{3!3!} = 1120$.

Ответы к варианту 2

1. 1,8.
2. $\frac{9}{2}$.
3. а) $-\frac{1}{2}$; б) график совпадает с графиком функции $y = 2 + \frac{1}{x}$, из которого исключены точки с абсциссами $-\frac{1}{2}; -1; 1; 4$.
4. $(-2; 14) \cup (34; +\infty)$.
5. $\sqrt{7}$.
6. $(2; -1), (-1; 2)$.
7. Да, например $\sqrt{2} + 1$ и 0 или $\sqrt[4]{2}$ и 0 (примеров много).
8. $-4; 0; \frac{3}{5}; \frac{3}{4}; \frac{7}{4}$.
9. Указание. Воспользуйтесь неравенством треугольника.
10. $\frac{8!}{2!3!} = 3360$.

Ответы к варианту 2

1. 1,8.
2. $\frac{9}{2}$.
3. а) $-\frac{1}{2}$; б) график совпадает с графиком функции $y = 2 + \frac{1}{x}$, из которого исключены точки с абсциссами $-\frac{1}{2}; -1; 1; 4$.
4. $(-2; 14) \cup (34; +\infty)$.
5. $\sqrt{7}$.
6. $(2; -1), (-1; 2)$.
7. Да, например $\sqrt{2} + 1$ и 0 или $\sqrt[4]{2}$ и 0 (примеров много).
8. $-4; 0; \frac{3}{5}; \frac{3}{4}; \frac{7}{4}$.
9. Указание. Воспользуйтесь неравенством треугольника.
10. $\frac{8!}{2!3!} = 3360$.